

**Torsten Becker · Richard Herrmann ·
Viktor Sandor · Dominik Schäfer ·
Ulrich Wellisch**

Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden

**Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch
für Aktuare**

Springer Spektrum

Inhaltsverzeichnis

1	Quantifizierung und Bewertung von Risiken	1
1.1	Verteilungen	1
1.1.1	Zufallsvariablen	2
1.1.2	Die Pseudoinverse	3
1.1.3	Multivariate Verteilungen	5
1.1.4	Unabhängigkeit	6
1.1.5	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	6
1.1.6	Elementare Schätzer	7
1.2	Risikomessung	8
1.2.1	Value at Risk und Expected Shortfall	9
1.2.2	Berechnung	12
1.3	Abhängigkeitsstrukturen und Copulas	14
1.3.1	Korrelation	14
1.3.2	Copulas – Definition und Eigenschaften	15
1.3.3	Beispiele und Konstruktionsmethoden	19
1.3.4	Abhängigkeitsmaße	23
	Literatur	26
2	Deskriptive Statistik und explorative Datenanalyse	27
2.1	Grundlagen	27
2.1.1	Grundaufgaben der Statistik	28
2.1.2	Grundgesamtheiten und Stichproben	29
2.1.3	Merkmale und Skalenniveaus	33
2.2	Häufigkeitsverteilungen	34
2.2.1	Histogramm	37
2.2.2	Empirische Verteilungsfunktion	43
2.2.3	Empirische Quantile	48
2.2.4	Kontingenztafeln	51
2.3	Lage- und Streuungsmaße	54
2.3.1	Lagemaße einer Stichprobe	54
2.3.2	Streuungsmaße einer Stichprobe	58

2.4	Grafische und explorative Methoden	61
2.4.1	Streudiagramm	61
2.4.2	Box-Whisker-Plot	62
2.4.3	Mosaik-Plot	65
2.4.4	Quantile-Quantile-Plot	67
2.4.5	Kerndichteschätzer	76
2.5	Assoziationsmaße	77
2.5.1	Korrelationskoeffizienten	78
2.5.2	Empirischer χ^2 -Koeffizient und Kontingenzkoeffizienten	86
	Literatur	90
3	Punktschätzung	93
3.1	Maximum Likelihood Schätzer	97
3.2	Qualität von Schätzern	101
3.2.1	Grundbegriffe	101
3.2.2	Reguläre Verteilungen und Fisher-Information	102
3.2.3	Beste Schätzer	105
3.3	Exponentialfamilien	106
3.3.1	Grundlegende Eigenschaften	106
3.3.2	Regularität und Schätzer in Exponentialfamilien	111
3.4	Eigenschaften von ML-Schätzern	113
3.4.1	Konsistenz	114
3.4.2	Asymptotische Verteilung	115
3.5	Parametertransformation	118
3.6	Konfidenzintervalle	122
3.6.1	Der einparametrische Fall	122
3.6.2	Univariate Konfidenzintervalle für mehrere Parameter	124
	Literatur	125
4	Hypothesentests	127
4.1	Grundbegriffe der Testtheorie	127
4.1.1	p -Werte	128
4.1.2	Gütefunktion, Teststärke	129
4.1.3	Hypothesentests bei Normalverteilungsannahme	131
4.1.4	χ^2 Anpassungstest	133
4.1.5	F^2 -Unabhängigkeitstest	134
4.2	Stichprobenumfänge für klassische Testverfahren	135
4.2.1	Gauß-Test, zweiseitig	135
4.2.2	Gauß-Test, einseitig	136
4.2.3	f -Test	137

4.3	Der Likelihood Quotienten Test	138
4.3.1	Der Test	139
4.3.2	Konfidenzbereiche	146
4.4	Verteilungsunabhängige Tests	148
4.4.1	Der exakte Binomialtest	148
4.4.2	Der Vorzeichentest	149
4.4.3	Der Vorzeichen-Rang-Test	152
	Literatur	154
5	Simulation	155
5.1	Zufallszahlen	156
5.1.1	Lineare Kongruenzen	157
5.1.2	Weitere Methoden	157
5.1.3	Anpassungsgüte	158
5.2	Die Inversionsmethode	158
5.2.1	Anwendung auf stetige Zufallsvariablen	159
5.2.2	Anwendung auf diskrete Zufallsvariablen	159
5.3	Das Verwerfungsverfahren	160
5.4	Spezielle Transformationsverfahren bei diskreten Verteilungen	163
5.4.1	Binomial-und Negativbinomial-Verteilung	164
5.4.2	Poisson-Verteilung	164
5.4.3	Approximative Verfahren für die Poisson-Verteilung	166
5.5	Transformationsverfahren bei stetigen Verteilungen	167
5.5.1	Normalverteilung	167
5.5.2	Beta-Verteilung, kleine Parameter	168
5.5.3	Gamma-Verteilung	170
5.5.4	Beta-Verteilung, große Parameter	171
5.5.5	Multivariate-Normalverteilung	172
5.6	Simulation von Copulas	174
	Literatur	179
6	Stochastische Prozesse und Modelle	181
6.1	Einführung	181
6.2	Endliche Markov-Ketten	182
6.2.1	Endliche homogene Markov-Ketten	184
6.2.2	Langzeitverhalten endlicher homogener Markov-Ketten	187
6.3	Endliche Markov-Prozesse	189
6.3.1	Endliche homogene Markov-Prozesse	189
6.3.2	Langzeitverhalten endlicher homogener Markov-Prozesse	196

6.4	Allgemeine Markov-Prozesse	199
6.4.1	Homogene Markov-Prozesse	199
6.4.2	Das kollektive Modell der Risikotheorie	206
6.4.3	Ruinwahrscheinlichkeit in homogenen Markov-Prozessen	211
6.5	Weiterführende Themen: Stationäre Prozesse	216
	Literatur	220
7	Biometrie	223
7.1	Einführung	223
7.2	Arten von Sterbetafeln	226
7.3	Methoden zur Ermittlung roher Sterbewahrscheinlichkeiten	228
7.3.1	Geburtsjahrmethode	230
7.3.2	Sterbejahrmethode	232
7.3.3	Sterbeziffernverfahren	233
7.3.4	Verweildauer methode	234
7.3.5	Vergleich der Methoden	235
7.4	Ausgleichsverfahren	239
7.4.1	Allgemeiner Aufbau eines Ausgleichsverfahrens	240
7.4.2	Mechanische Ausgleichung	242
7.4.3	Das Verfahren von Whittaker-Henderson	243
7.4.4	Die analytische Ausgleichung	248
7.4.5	Das Verfahren der kleinsten Quadrate	248
7.4.6	Das Verfahren der Spline-Funktionen nach Reinsch	250
7.4.7	Fazit	255
7.5	Berücksichtigung von Veränderungen im Zeitablauf	256
7.5.1	Allgemeines zu Trendfunktionen	257
7.5.2	Traditionelles Modell	258
7.5.3	Kohortenmodell	260
7.5.4	Synthesemodell	261
7.5.5	Das Lee-Carter-Modell	262
7.6	Statistische Tests zur Überprüfung	265
7.6.1	Der Vorzeichentest	268
7.6.2	Der Iterationstest	270
7.6.3	Der χ^2 -Test	271
7.7	Berücksichtigung von Risiken	272
7.7.1	Risiken und deren Berücksichtigung bei Sterbetafeln	272
7.7.2	Das Änderungsrisiko	273
7.7.3	Irrtumsrisiko	274
7.7.4	Berücksichtigung bei den Ausscheidewahrscheinlichkeiten	276
7.7.5	Berücksichtigung des Zufallsrisikos auf Bewertungsebene	278
7.7.6	Eine Kombination der beiden Methoden	281
	Literatur	283

8	Lineare und verallgemeinerte lineare Regression	285
8.1	Einführung	285
8.1.1	Regressionsanalyse in der Versicherungsmathematik	285
8.1.2	Grundlegende Konzepte der Regressionsanalyse	288
8.2	Design von linearen und verallgemeinerten linearen Modellen	290
8.2.1	Komponenten des Modelldesigns	290
8.2.2	Konstruktion der Designmatrix	291
8.3	Parameterschätzung in linearen Modellen	296
8.3.1	Das klassische lineare Modell	296
8.3.2	Das klassische lineare Modell mit Gewichten	299
8.4	Verallgemeinerte lineare Modelle	304
8.4.1	Kritik des klassischen linearen Modells	304
8.4.2	Verallgemeinerte lineare Modelle	306
8.5	Anpassung verallgemeinerter linearer Modelle	312
8.5.1	Explorative Analyse von Link und Varianzfunktion	312
8.5.2	Maximum-Likelihood-Schätzung	314
8.6	Weiterführende Themen	317
8.6.1	Analyse der Residuen und der Dispersion	317
8.6.2	Testverfahren für verallgemeinerte lineare Modelle	318
	Literatur	321
9	Credibility-Modelle	323
9.1	Einführung	323
9.2	Das Bayes'sche Modell	325
9.2.1	A-priori und a-posteriori Verteilung	326
9.2.2	Die Credibility-Prämie	331
9.3	Linearisierte Credibility-Modelle	336
9.3.1	Die linearisierte Credibility-Prämie	336
9.3.2	Das Bühlmann-Straub-Modell	340
	Literatur	347
10	Anhang: bedingte Verteilungen	349
11	Anhang: erzeugende Funktionen	353
11.1	Die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion	353
11.2	Momentenerzeugende Funktion	354
12	Anhang: spezielle Verteilungen	357
12.1	Lage-Skalen Familien	357
12.2	Diskrete Verteilungen	358
12.2.1	Klassische Verteilungen	358
12.2.2	Panjer-Verteilungen	359

12.3	Stetige Verteilungen	360
12.3.1	Klassische Verteilungen	360
12.3.2	Extremwert-Verteilungen	362
12.3.3	Transformationen	362
12.3.4	Transformationen von Lage-Skalen-Familien	363
12.3.5	Dichten nach Transformation	363
12.4	Multivariate Verteilungen	364
12.4.1	Multivariate Normalverteilung	364
12.4.2	Multivariate Log-Normalverteilung	365
12.4.3	Multivariate t -Verteilung	365
13	Anhang: stochastische Konvergenz	367
13.1	Konvergenzbegriffe, Eigenschaften	367
13.2	Stochastische Konvergenzordnung	368
13.3	Stochastische Reihenentwicklung, Delta-Methode	369
	Literatur	370
	Sachverzeichnis	371